УДК 517.3

Черенков Никита Юрьевич
курсант 2 курса
Ярославское Высшее Военное училище ПВО
Россия, г. Ярославль
e-mail: nikket81@mail.ru

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Аннотация: *Цель статьи — помочь студентам в освоении материала на начальном уровне изучения темы, повторение пройденного материала, предоставление дополнительных примеров для проработки и закрепления полученных знаний, привития абстрактного мышления и повышения навыков. Изложенный материал охватывает только вводную часть математического анализа — основы интегрирования.*

Ключевые слова: интегрирование, неопределенный интеграл, математический анализ, методическая поддержка, повторение материала.

Cherenkov Nikita Yurievich
2nd year cadet
Yaroslavl Higher Military Air Defense School
Russia, Yaroslavl

UNCERTAIN INTEGRALS AND THEIR APPLICATIONS IN SOLVING PROBLEMS

Abstract: *The purpose of the article is to help students in mastering the material at the initial level of studying the topic, repeating the material covered, providing additional examples for working out and consolidating the acquired knowledge, instilling abstract thinking and improving skills. The presented material covers only the introductory part of mathematical analysis - the basics of integration.*

Key words: integration, indefinite integral, mathematical analysis, methodological support, repetition of material.

Основные понятия

Операция нахождения неопределенного/определенного интеграла называется интегрированием.

Результатом интегрирования функции $f(x)$ на интервале (a, b) является функция $F(x)$, которая называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Аналогично, функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $F(x) = f(x)$.

Теорема 1

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x) + C$ также будет первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b). C в данном случае и далее будет считаться некоторой произвольной постоянной.

Доказательство:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

Теорема 2

Если $F(x)$ и $V(x)$ две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x) = V(x) + C$

Доказательство:

т.к. $F'(x) = f(x)$, $V'(x) = f(x)$, введем $\alpha(x) = F(x) - V(x)$ $\alpha'(x) = 0$ для всякого x, принадлежащего интервалу (a, b), тогда из теоремы Лагранжа $\alpha(x) = C$, т.е. $F(x) - V(x) = C$.

Множеством всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ — знак неопределенного интеграла

$f(x)dx$ — подинтегральное выражение

Свойства неопределенного интеграла

1) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$

3) $\int A \cdot f(x)dx = A\int f(x)dx$

4) $\int \big(f(x) \pm v(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int v(x)dx$

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда $\int f(\alpha)d\alpha = F(\alpha) + C$, где $\alpha(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Примеры:

1. $\int tg(x)\ dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)} =$
$-\ln|\cos(x)| + C$

2. $\int \frac{x^2}{x-1}dx = \int \frac{x^2-x+1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx =$

$$= \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x-1}dx = \frac{(x-1)^2}{2} + \ln|x-1| + C$$

3. $\int \cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,d(5x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$

Примеры для самостоятельной работы:

1. $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$

Ответ:$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} + C$

2. $\int \left(2x\sqrt{x^2+1}\right)dx$

Ответ:$\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$

2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f[\varphi(t)]d[\varphi(t)]$,

где φ — монотонная непрерывно дифференцируемая функция на (a, b)

Пример:

$$\int \left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

Сделаем замену $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$

Тогда:

$$\int \cos(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt - \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{1}{2}t + C$$

где $x = \arcsin(t)$

Примеры для самостоятельной работы:

1. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Ответ: $-\sqrt{4-t^2} - 4\arcsin \quad \frac{t}{2} + C$, где $t = x + 1$

2. $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$

Ответ: $\frac{3}{8}\ln|t^2 + 16| + \frac{1}{16}arc\,tg\frac{t}{4} + C$, где $t = 2x - 1$

3. Интегрирование по частям

Пусть функции *u=u(x), v=v(x)* имеют непрерывные производные на *(a, b)*. Тогда $d(uv) = udv + vdu$

Отсюда следует, что $udv = d(uv) - vdu$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пример:

$$\int (x^2 + 1)\cos(x)\,dx =$$

Представим $u = x^2 + 1$, $dv = \cos(x)\,dx$

Тогда $du = 2xdx,\ v = \sin(x) = (x^2 + 1)\sin(x) - \int\ 2x \cdot \sin(x)\,dx =$

$(x^2 + 1)\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$

Примеры для самостоятельной работы:

1. $\int\ xe^{-x}\,dx$

Ответ: $\frac{x^2 arc\,tg(x)}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arc\,tg(x)\ + C$

2. $\int\ x^2\cos^2(x)\,dx$

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) + \frac{1}{3}x^3 + C$