

*Лебедева Алёна Павловна,
студентка бакалавриата,
Северо-Кавказский Федеральный Университет,
Россия, г. Ставрополь
e-mail: alena_lebedeva_0101@mail.ru*

*Максимов Андрей Владимирович,
студент бакалавриата,
Северо-Кавказский Федеральный Университет,
Россия, г. Ставрополь*

*Антипов Артём Александрович,
студент бакалавриата,
Северо-Кавказский Федеральный Университет,
Россия, г. Ставрополь*

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Аннотация: В данной статье рассматриваются возможности применения принципа сжимающих отображений – для исследования вопросов существования и единственности решений более известных типов алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. Целью данного исследования является исследование применения принципа сжимающих отображений к решению задач вычислительной математики. Объектом изучения выступают сжимающие отображения. Методы исследования: теоретический, исследовательский.

Ключевые слова: принцип сжимающих отображений, алгебраические уравнения, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, СЛАУ, численные методы.

*Lebedeva Alena Pavlovna,
bachelor student,
North Caucasus Federal University,
Russia, Stavropol*

*Maksimov Andrey Vladimirovich,
bachelor student,
North Caucasus Federal University,
Russia, Stavropol*

Antipov Artyom Alexandrovich,

*bachelor student,
North Caucasus Federal University,
Russia, Stavropol*

APPLICATION OF THE PRINCIPLE OF COMPRESSIBLE MAPPINGS TO SOLVING PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS

***Abstract:** This article discusses the possibilities of applying the principle of compressive maps – to study the existence and uniqueness of solutions of more well-known types of algebraic, differential and integral equations. The purpose of this study is to investigate the application of the principle of compressive maps to solving problems of computational mathematics. The object of study is compressive mappings. Research methods: theoretical, research.*

Keywords: the principle of compressive maps, algebraic equations, differential equations, integral equations, SLAE, numerical methods.

Вопрос о существовании и единственности решений алгебраических, дифференциальных, интегральных и других типов уравнений можно выразить в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении подходящего метрического пространства в себя. Одним из критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях является так называемый принцип сжимающих отображений. В описанном подходе сочетаются как идейная простота, так и многогранность применения к различным по постановке проблемам математически, а также глубина получаемых результатов. Дополнительным достоинством еще является и то, что в то же время с доказательством существования решений предлагается продуктивный алгоритм для его поиска [1].

Отображением множества X во множество Y называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие один или несколько элементов множества Y .

Например, пусть X — это множество современных актёров кино, а Y — это множество современных кинофильмов. Актёру x ставится в соответствие фильм y , если актёр x снимался в фильме y . Один актёр мог сниматься в

нескольких фильмах, и, наоборот, в одном фильме может участвовать несколько актёров.

Однозначным отображением j множества X во множество Y называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент из множества Y [2, 8].

Свойства отображений:

- Сюръективность

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется сюръективным, если

$$\forall y \in Y \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \quad (1)$$

т. е. нет такого образа, для которого нет прообраза.

- Инъективность

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется инъективным, если

$$\forall x_1 \in X \text{ и } \forall x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (2)$$

т. е. образы различных прообразов – различны.

- Биjectивность (взаимнооднозначность)

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется биективным, если оно одновременно сюръективно и инъективно, т. е. каждому прообразу соответствует единственный образ; и у каждого образа имеется единственный прообраз [3, 4].

Отображение A метрического пространства R в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек x и y пространства R выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (3)$$

Точка x называется неподвижной точкой отображения A , если выполняется равенство

$$Ax = x \quad (4)$$

Можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R , имеет одну и только одну неподвижную точку.

Следует отметить, что принцип сжимающих отображений позволяет не только доказать существование и единственность решения, но и дает метод нахождения приближенного решения. Этот метод называют методом итераций или методом последовательных приближений.

Рассмотрим применение этого метода к отысканию приближенного решения уравнения

$$f(x) = x \quad (5)$$

где функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b]$ и удовлетворяет условию

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1| \quad (6)$$

с константой $K < 1$ и отображает промежуток $[a, b]$ в себя.

В этом случае f есть сжимающее отображение и, в соответствии с сформулированной выше теореме, последовательность чисел

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, f(x_n) = x_{n-1} \dots \quad (7)$$

сходится к единственному корню уравнения (8.1).

Если функция $f(x)$ имеет на промежутке $[a, b]$ производную $f'(x)$ и при этом выполняется неравенство

$$|f'(x)| \leq K < 1 \quad (8)$$

где K – некоторая постоянная, то легко видеть, что критерий сжатости (8.2) выполнен [5, 6, 7].

Список литературы:

1. Локтионов И.К., Мироненко Л.П., Турупалов В.В. Численные методы (учебник для студентов высших учебных заведений). Донецк: ДОННТУ, 2017. 232 с.
2. Новиков А.И. Численные методы линейной алгебры. Рязань: РГРТА. 50 с.
3. Отображения и их свойства. [Электронный ресурс] // Режим доступа: URL: <http://alex111007.ru/book/dm/zan/z07/z07v01.htm> (дата обращения 25.12.2021 г.).

4. Отображения и их свойства. [Электронный ресурс] // Режим доступа: URL: https://life-prog.ru/2_54793_otobrazheniya-i-ih-svoystva.html (дата обращения 25.12.2021 г.).

5. Применение принципа сжатых отображений. [Электронный ресурс] // Режим доступа: URL: https://scask.ru/m_book_ieq.php?id=11 (дата обращения 25.12.2021 г.).

6. Принцип сжимающих отображений. [Электронный ресурс] // Режим доступа: URL: <https://studfile.net/preview/3602403/page:18/> (дата обращения 25.12.2021 г.).

7. Принцип сжимающих отображений. [Электронный ресурс] // Режим доступа: URL: https://de.ifmo.ru/--books/0051/6/6_2/62_sgot_1.htm (дата обращения 25.12.2021 г.).

8. Сжимающее отображение. [Электронный ресурс] // Режим доступа: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Сжимающее_отображение#Применение (дата обращения 25.12.2021 г.).