УДК 517.95

Кодзоева Амина Асламбековна
студентка
физико-математический факультет
Ингушский Государственный Университет
Россия, г. Магас
e-mail: aminat.kodzoeva18@yandex.ru

Научный руководитель: Кодзоева Фира Джабраиловна
физико-математический факультет
Ингушский Государственный Университет
Россия, г. Магас

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Аннотация: *В статье рассматривается постановка проблем Диофанта. Автором приводятся способы решения диофантовых уравнений.*

Ключевые слова: Диофант, уравнения, множество, рациональные числа.

Kodzoeva Amina Aslambekovna
student
Physics and Mathematics Faculty
Ingush State University
Russia, Magas
e-mail: aminat.kodzoeva18@yandex.ru

Academic Supervisor: Kodzoeva Fira Dzhabrailovna
Physics and Mathematics Faculty
Ingush State University
Russia, Magas

DIOPHANTINE EQUATIONS

Abstract: *The article deals with the formulation of Diophantus' problems. The author provides methods for solving Diophantine equations.*

Key words: Diophantus, equations, set, rational numbers.

Уравнение вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

где коэффициенты $a_1 a_2, \dots, a_n$, c- целые числа, а неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются целыми или рациональными числами, называется **линейным диофантовым уравнением.**

К решению подобных уравнений сводятся разнообразные текстовые задачи, в которых неизвестные величины выражают количество того или иного рода и поэтому являются натуральными) числами. Каждая конкретная задача в целых числах может решаться с помощью разных методов.

Теорема:

Неопределенное уравнение второго порядка от двух переменных либо не имеет ни одного рационального решения, либо имеет их бесконечно много, причем в последнем случае все решения выражаются как рациональные функции параметра $x = \phi(k)$, $y = \psi(k)$, где ϕ и ψ — рациональные функции.

Для того чтобы решить диофантово уравнение необходимо провести следующие этапы:

1. выяснить имеет ли уравнение целочисленные решения;
2. выяснить конечны множества его целочисленных решений или бесконечны;
3. решить уравнение на множестве целых чисел, т. е. найти все его целочисленные решения;
4. решить уравнение на множестве целых положительных чисел;
5. решить уравнение на множестве рациональных чисел.

Перечислим известные способы решения диофантовых уравнений-

1) использование алгоритма Евклида;
2) использование цепных дробей;
3) способ перебора вариантов;
4) использование сравнений

Рассмотрим уравнение второй степени с двумя неизвестными

$$ax^2 + bxy + cy^2 + fx + hy + d, \text{где } a, b, c, f, d \in Z$$

может:

1) не иметь решений в целых числах;

2) иметь конечное число решений в целых числах;

3) иметь бесконечное множество решений в целых числах.

При этом в рациональных числах диофантовы уравнения второй степени либо не имеют решений, либо имеют их бесконечно много.

На данный момент известны следующие способы решения неопределенных уравнений второго порядка, а именно

– метод полного перебора всех возможных значений переменных, входящих в уравнение;

– метод разложения на множители;

– метод, основанный на оценке выражений, входящих в уравнение;

– метод решения уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных;

– метод бесконечного (непрерывного) спуска;

– метод, основанный на выражении одной переменной через другую и выделении целой части дроби;

– метод, основанный на выделении полного квадрата.

Попробуем теперь выделить метод Диофанта «в чистом виде». Итак, пусть дано уравнение

$$x_2 + y_2 = a_2, \tag{1}$$

которое представляет окружность с центром в начале координат. Одним из рациональных решений этого уравнения будет (0, –*a*). Диофант делает подстановку:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = kx - a. \end{cases} \tag{2}$$

Подстановку (2) можно интерпретировать геометрически как проведение через точку (0, –*a*) прямой

$$y = kx - a. \tag{3}$$

Эта прямая встретит окружность (1) ещё в одной точке, координаты которой будут рациональными функциями от k. Действительно,

$$x^2 + (kx - a)^2 = a^2$$

и

$$x = \frac{ak}{{}^2 + 1}\; a = a, \quad y = kx - \frac{{}^2 - 1}{{}^2 + 1}.$$

Таким образом, каждому рациональному значению k отвечает одна и только одна рациональная точка кривой (1). Наоборот, как легко видеть, если мы соединим произвольную рациональную точку кривой (1) с точкой (0, $-a$), то получим прямую с рациональным угловым коэффициентом.

Теперь рассмотрим неопределённые уравнения третьего порядка

Выделим метод Диофанта в общем виде. Пусть задано число a. Обозначим одно из искомых чисел x, другое $a - x$. По условию,

$$x(a - x) = y^3 - y. \tag{11}$$

Одним из рациональных решений будет (0, –1). Следуя Диофанту, проведём через эту точку прямую

$$y = kx - 1 \tag{*}$$

(Диофант берёт сначала $k = 2$) и найдём её точки пересечения с кривой (11):

$$ax - x^2 = k^3x^3 - 3k^2x^2 + 2kx.$$

Для того чтобы x получилось рациональным, достаточно положить

$$2k = a, \quad \text{т.е.} \quad k = a/2, \tag{**}$$

что и делает Диофант. После этого найдём

$$x = \frac{3k^2 - 1}{k^3} = 2\cdot\frac{3a^2 - 4}{a^3}.$$

Посмотрим, что означает условие (**) для прямой (*). Для того чтобы это выяснить, применим метод Диофанта к произвольному уравнению третьего порядка от двух переменных (10), которое имеет рациональное решение (a, b): $f_3(a, b) = 0$. Проведём через точку $P(a, b)$ прямую

$$y - b = k(x - a) \tag{12}$$

или

$$\begin{cases} x = a + t, \\ y = b + kt. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда

$$f_3(a + t, b + kt) = f_3(a, b) + tA(a, b) + ktB(a, b) + t^2C(a, b, k) + t^3D(a, b, k) = 0.$$

Но $f_3(a, b) = 0$ и, если положить

$$A(a, b) + kB(a, b) = 0, \tag{14}$$

то получим

$$k = -\frac{A(a, b)}{B(a, b)} = -\frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial y}} \qquad (P),$$

т.е. угловой коэффициент нашей прямой (12) должен быть выбран так, чтобы она была касательной к кривой (10) в точке $P(a, b)$. Таким образом, здесь Диофант пользуется методом касательной.

Этим же способом Диофант решает задачу 18 книги VI, а также, вероятно, и задачу

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3,$$

рассмотренную, по свидетельству самого Диофанта, в его книге «Поризмы», которая до нас не дошла.

Заметим, что попутно Диофант получает чисто алгебраический способ определения углового коэффициента k касательной, равного производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial y}}.$$

Таким образом, решение уравнений в целых и рациональных числах — один из самых красивых разделов математики, теоретические и практические сведения которого используются как в инженерии, биологии, так и повседневной жизни.

Список литературы:

1. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. М.: «Наука», 1972. 68 с.
2. Башмакова И.Г., Славутин Е.И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: «Наука», 1984. 256 с.
3. Гринько Е.П., Головач А.Г. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам. Брест: БрГУ имени А.С. Пушкина, 2013. 180 с.
4. Жмурова И.Ю., Бесперстова А.Ю. Использование историко-математических сведений в курсе теории чисел // Молодой ученый. 2013. № 10.
5. Жмурова И.Ю., Коршунова Л.А. Элективный курс «Эйлеровы графы» как средство реализации интеграционных связей математики // Молодой ученый. 2013. № 5.
6. Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2010. Задания С6. Брянск, 2010. 142 с.
7. Шевкин А.В., Пукас Ю.О. ЕГЭ. Математика. Задание С6. М.: «Экзамен», 2014. 64 с.